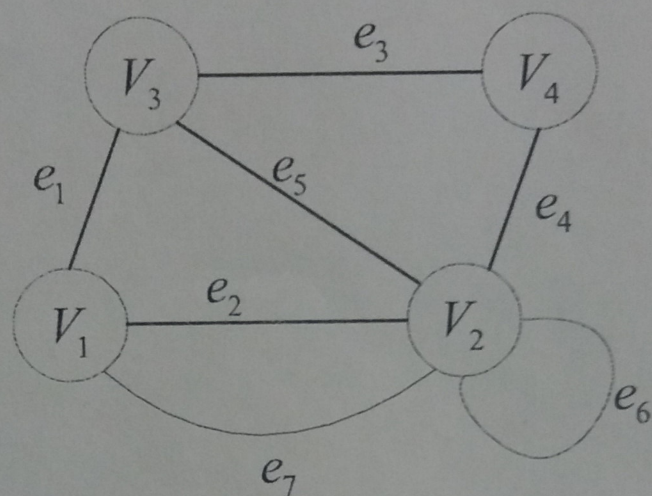
Лабораторный практикум по дисциплине «Теория конечных графов»

контрольное задание по предмету „математические методы"

Тема: Основные понятия теории графов. Неориентированные графы.

Лабораторная работа № 1.

№ 1. Дан граф $G(V,E)$.



Определить:

1) Множества V и E.
2) Пары смежных вершин.
3) Инцидентность ребра вершинам.
4) Пары смежных ребер.
5) Степени вершин.
6) Параллельные ребра.
7) Наличие петель.

№ 2. Построить неизоморфные графы с пятью вершинами и ребрами, $i=\overline{0,10}$.

Лабораторная работа № 2.

№ 1. Построить матрицы смежности и инцидентности для графов:

а)

Глава 2

ГРАФЫ

В этой главе описывается еще один универсальный и наглядный язык, графический, который применяется во многих областях науки и техники. Знакомство с элементами теории графов ограничится определениями и иллюстрациями к основным положениям этого раздела математики. Теория графов дает исключительно удобный аппарат для моделирования структурных свойств различных систем и отношений между объектами разной природы, в том числе программных моделей.

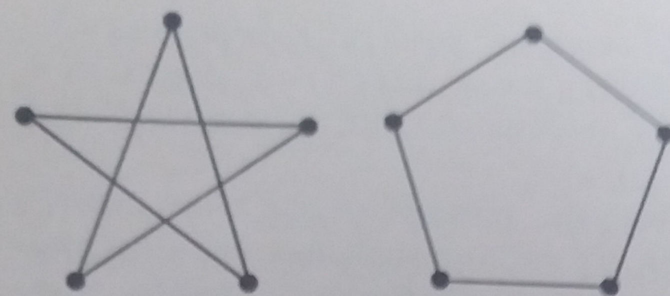
2.1. Основные понятия и определения графа и его элементов

Так о великих вещах помогают составить понятье
Малые вещи, пути намечая для их постижения.

Лукреций

Впервые понятие «граф» ввел в 1936 г. венгерский математик Денни Кёниг. Но первая работа по теории графов принадлежала перу великого Леонарда Эйлера и была написана еще в 1736 г. С помощью графов изображаются схемы различных дорог, линии воздушных сообщений, газопроводов, теплотрасс, электросетей, а также микросхемы, дискретные многошаговые процессы, системы различных бинарных отношений, химические структурные формулы и другие диаграммы и схемы. Применяются графы для решения задач химии, экономики, электротехники и автоматики. Также они широко используются в информатике и строительстве. Без графов сложно анализировать классификации в различных науках.

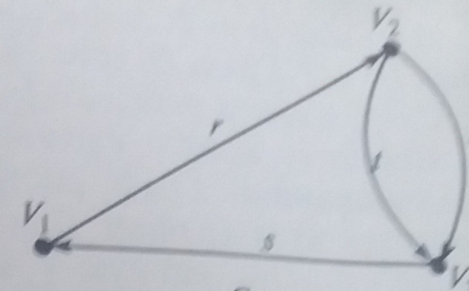
Графом $G = (V, X)$ называется пара двух конечных множеств: множество точек и множество линий, соединяющих некоторые пары точек. В терминах декартова произведения (подразд. 1.5) множество



G_5 $\overline{G_5}$

а *б*

Рис. 2.2. Дополнение $\overline{G}_5$ графа G_5 до графа G_2, изображенного на рис. 2.1, *б*



G_6

Рис. 2.3. Ориентированный граф

случаем этого свойства будет следующее правило: дополнением полного графа будет нуль-граф, и наоборот.

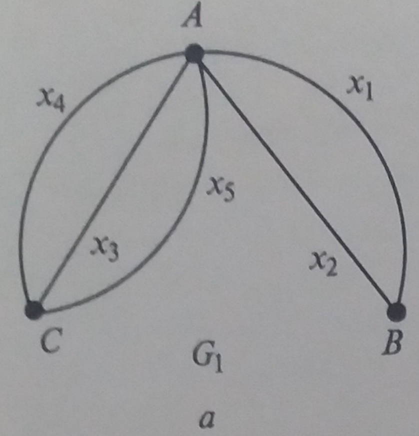
Если все пары (V_i, V_j) во множестве X являются упорядоченными, т.е. кортежами длины 2, то граф называется **ориентированным**, **орграфом**, или **направленным**. Поскольку сразу может быть не известно о каком графе идет речь, в этой главе мы будем употреблять круглые скобки для обозначения ребра вместо угловых, как это должно было быть для кортежей. В них будет помещаться соответствующая пара вершин. В таком случае ребра принято изображать стрелками (рис. 2.3). **Началом** ребра называется вершина, указанная в кортеже первой, **концом** — вторая вершина этой пары (графически она указана стрелкой). Ребра ориентированного графа имеют определенные фиксированные начало и конец и называются **дугами**. Очевидно, дуги (V_1, V_3) и (V_3, V_1), если они обе существуют, различны: $(V_1, V_3) \neq (V_3, V_1)$.

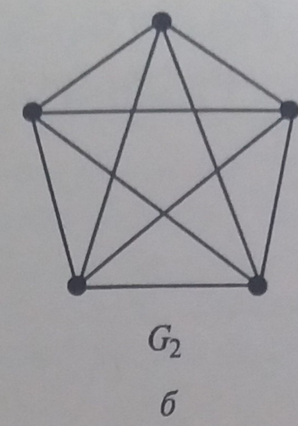
Степенью $\dfrac{\textbf{входа}}{\textbf{выхода}}$ вершины ориентированного графа называется число ребер, для которых эта вершина является $\dfrac{\text{концом}}{\text{началом}}$.

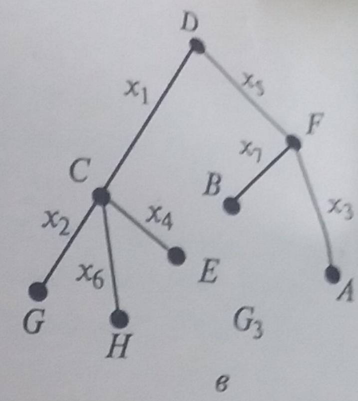
Степень входа вершины V будем обозначать $\deg_+(V)$, а степень выхода — $\deg_-(V)$. На рис. 2.3 $\deg_+(V_1) = 1$, $\deg_+(V_2) = 1$, $\deg_+(V_3) = 2$, $\deg_-(V_1) = 1$, $\deg_-(V_2) = 2$, $\deg_-(V_3) = 1$.

Дуги орграфа называются **кратными**, если они имеют одинаковые начальные и конечные вершины, т.е. одинаковые направления. Например, кратны дуги $u(V_2, V_3)$ и $t(V_2, V_3)$ на рис. 2.3.

Последовательность попарно инцидентных вершин $V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}$ неориентированного графа, т.е. последовательность ребер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется **маршрутом**. Число ребер маршрута называется **длиной** маршрута. Например, на рис. 2.1, *в* $HCDFD$ — маршрут длиной 4. Обозначение: $|HCDFD| = 4$. Очевидно, что если $V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}$ — маршрут длины $k-1$, то и $V_{i_k}, V_{i_{k-1}}, \ldots, V_{i_2}, V_{i_1}$ также будет являться маршру-







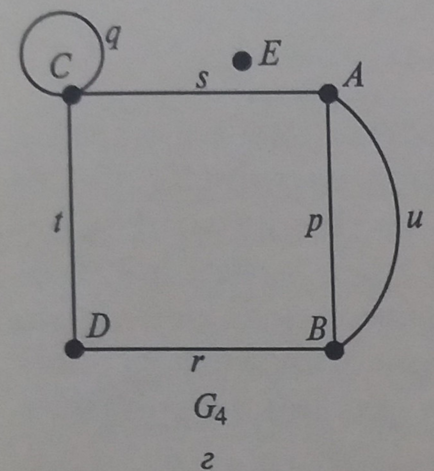


Рис. 2.1. Примеры графов:

а — со смежными вершинами; *б* — полный; *в* — со смежными ребрами; *г* — с петлей

линий X, соединяющее пару точек, — это некоторое подмножество множества $V \times V$: $X \subset (V \times V)$.

Точки называются **вершинами**, или **узлами**, графа, линии — **ребрами** графа. Примеры графов приведены на рис. 2.1.

Пусть дан граф $G = (V, X)$, где $V = \{V, W, \ldots\}$ — конечное непустое множество его вершин, а $X(V, W)$ — его ребра. Если ребро графа G соединяет две его вершины V и W (т. е. $\langle V, W \rangle \in X$), то говорят, что это ребро им **инцидентно**. Две вершины графа называются **смежными**, если существует инцидентное им ребро: на рис. 2.1, *а* смежными являются вершины A и B, A и C. Если граф G имеет ребро $X(V, V)$, у которого начало и конец совпадают, то это ребро называется **петлей.** На рис. 2.1, *г* петля — $q(C, C)$. Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину. На рис. 2.1, *в* смежными являются, например, ребра x_1 и x_2 с общей вершиной C.

Граф $G(V, X)$ может иметь ребра с одинаковыми парами вида $X(V, W)$. Такие ребра называются **кратными**, или **параллельными**. На рис. 2.1, *а* кратными являются, например, ребра $x_1(A, B)$, $x_2(A, B)$. Вершинам A и B инцидентны ребра x_1, x_2, x_3. Количество одинаковых пар вида $x(V, W)$ называется **кратностью** ребра (V, W). На рис. 2.1, *а* ребро AC имеет кратность, равную 3, а ребро AB — кратность, равную 2. Число ребер, инцидентных вершине A, называется **степенью** этой вершины и обозначается $\deg(A)$ (от англ. *degree* — степень). Если вершине инцидентна петля, она дает вклад в степень, равный двум, так как оба конца приходят в эту вершину.

На рис. 2.1, *в* вершина A имеет степень, равную 1, вершина C — 4, вершина D — 2. Записывается это в виде: $\deg(A)=1$, $\deg(C)=4$, $\deg(D)=2$. Граф G_4 (рис. 2.1, *г*) содержит четыре вершины $V=\{A, B, C, D\}$ и шесть ребер $X=\{p, q, r, s, t, u\}$.

Вершина графа, имеющая степень, равную нулю, называется **изолированной**. Граф, состоящий из изолированных вершин, называется **нуль-графом**. Для нуль-графа $X=\varnothing$. Вершина графа, имеющая степень, равную 1, называется **висячей**. На рис. 2.1, *г* вершина E — изолированная: $\deg(E)=0$, а вершины A, B, E, G, H на рис. 2.1, *в* — висячие.

Теорема 2.1. *В графе $G(V,X)$ сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа*:

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(V_i)=2m,$$

где $n=|V|$ — число вершин; $m=|X|$ — число ребер графа.

Вершина называется $\dfrac{\textbf{четной}}{\textbf{нечетной}}$, если ее степень — $\dfrac{\text{четное}}{\text{нечетное}}$ число.

На рис. 2.1, *в* $\deg(D)=2$, $\deg(F)=3$, значит, у графа G_3 вершина D является четной, а F — нечетной. В теории графов доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Число нечетных вершин любого графа — четно.*

Следствие. Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.

Граф G называется **полным**, если любые две его различные вершины соединены одним и только одним ребром. Полным является граф G_2 на рис. 2.1, *б*. Таким образом, полный граф определяется только своими вершинами. Пусть число вершин полного графа n. Тогда степень любой вершины, очевидно, равна $\deg(V)=n-1$, а число ребер равно числу сочетаний из n по 2, т.е. $m=C_n^2$. Число ребер также можно найти по теореме 2.1:

$$m=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\deg(V_i)=\frac{1}{2}n\deg(V)=\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2.$$

Дополнением графа $G(V, X)$ называется граф $\overline{G}(V, X')$ с теми же вершинами V, что и граф G, и имеющий те и только те ребра X', которые необходимо добавить к графу G, чтобы он стал полным. Очевидно, что граф с кратными ребрами не имеет дополнения. Например, дополнением графа G_5 до графа G_2 на рис. 2.1, *б* является граф $\overline{G}_5$ (рис. 2.2).

Как отмечалось в подразд. 1.3, дополнением универсального множества является пустое, и наоборот. Поскольку граф и его дополнение отличаются только ребрами (множества X и X') и дополнение графов сводится к дополнению множества X, то частным