$$\begin{cases} \ldots \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Вариант 2 Контрольное задание по высшей математике.

1. Найти матрицу $C=2A-B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Рис. 1.1. Приближение числа π

разрядная сетка МК не вместила всех цифр результата и все разряды начиная с восьмого были опущены. (В том, что ответ неточен, легко убедиться, проверив деление умножением: $1{,}3913043 \cdot 2{,}3 = 3{,}9999998$.) Не зная истинного значения допущенной ошибки, вычислитель в подобной ситуации всегда может быть уверен, что ее величина не превышает единицы самого младшего из изображенных на индикаторе разряда результата. Следовательно, в полученном результате все цифры верны.

Отметим, что первая отброшенная (неверная) цифра часто называется *сомнительной*.

Говорят, что приближенное данное записано *правильно*, если в его записи все цифры верные. Это и понятно — сохранение в записи чисел неверных цифр не имеет смысла. Но важно и другое: если число записано правильно, то по одной только его записи в виде десятичной дроби можно судить о точности этого числа. Пусть, например, записано приближенное число $a = 16{,}784$, в котором все цифры верны. Из того, что верна последняя цифра 4, которая стоит в разряде тысячных, следует, что абсолютная погрешность значения a не превышает 0,001. Это значит, что можно принять $\Delta a = 0{,}001$, т.е. $a = 16{,}784 \pm 0{,}001$.

Очевидно, что правильная запись приближенных данных не только допускает, но и обязывает выписывать нули в последних разрядах, если эти нули являются выражением верных цифр. Например, в записи $b = 109{,}070$ нуль в конце означает, что цифра в разряде тысячных верна и она равна нулю. Предельной абсолютной погрешностью значения b, как следует из записи, можно считать $\Delta b = 0{,}001$. Для сравнения можно заметить, что значение $c = 109{,}07$ является менее точным, так как из его записи приходится принять, что $\Delta c = 0{,}01$.

Значащими цифрами в записи числа называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля, и нули, если они расположены между значащими цифрами или стоят в конце для выражения верных знаков.

Учитывая приведенное ранее соглашение о записи приближенных числовых значений, можно сказать короче: значащими цифрами числа являются все цифры в его (правильной) записи начиная с первой ненулевой слева.

Пример 1.4. а) 0,2409 — четыре значащие цифры; б) 24,09 — четыре значащие цифры; в) 100,700 — шесть значащих цифр.

Выдача числовых значений в ЭВМ, как правило, устроена таким образом, что нули в конце записи числа, даже если они верные, не сообщаются. Это означает, что если, например, ЭВМ показывает результат 247,064 и в то же время известно, что в этом результате верными должны быть восемь значащих цифр, то полученный ответ следует дополнить нулями: 247,06400.

В процессе вычислений часто происходит *округление чисел*, т.е. замена чисел их значениями с меньшим количеством значащих цифр. При округлении возникает погрешность, называемая погрешностью округления. Пусть x — данное число, а x_1 — результат округления. Погрешность округления определяется как модуль разности прежнего и нового значений числа:

$$\Delta_{\text{окр}} = \left|x - x_1\right|. \tag{1.7}$$

В отдельных случаях вместо $\Delta_{\text{окр}}$ приходится использовать его верхнюю оценку.

Пример 1.5. Выполним на 8-разрядном МК действие 1/6. На индикаторе высветится число 0,1666666. Произошло автоматическое округление бесконечной десятичной дроби 0,1(6) до числа разрядов, вмещающихся в регистре МК. При этом можно принять $\Delta_{\text{окр}} = 0{,}7 \cdot 10^{-7}$.

Рассмотренный случай «принудительного» округления называется *округлением методом отбрасывания*. Очевидно, что сам по себе метод отбрасывания оставляет все сохраняемые цифры округленного числа верными.

Если вычисления ведутся с точностью меньшей, чем машинная точность, целесообразнее пользоваться способом *симметрического округления*, который приводит к меньшей величине округления, чем способ отбрасывания. Симметрическое округление выполняется по следующему правилу: если первая слева из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые десятичные знаки остаются без изменения, а если первая слева из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Из правил симметрического округления следует, что его погрешность не превышает половины единицы последнего сохраняемого разряда. Это обстоятельство позволяет вести счет с точностью, большей, чем единица последнего сохраняемого разряда. По этой причине наряду с понятием «верная цифра в широком смысле», соответствующим методике округления путем отбрасывания, используется понятие «цифра, верная в строгом смысле», применяемое в вычислениях с симметрическим округлением.

Цифра числа называется *верной в строгом смысле*, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Отметим, что погрешности принято записывать с одной значащей цифрой (редко — с двумя). Кроме того, при округлении том длины $k - 1$. Маршрут принято задавать как последовательность ребер, поскольку это более удобно при наличии кратных ребер. Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется **замкнутым** или **циклом**. В графе G_4 (рис. 2.1, *г*) (t, s, p, r), (u, s, t, r) — циклы длиной 4, (r, t, q, s, u) — цикл длиной 5, (t, s, u, r, t, s, p, r) — 8-цикл, (p,u) — 2-цикл, петля (q) — 1-цикл.

Расстоянием между двумя вершинами называется минимальная длина из всех возможных маршрутов между этими вершинами при условии, что существует хотя бы один такой маршрут. Обозначается как $d(V_1 V_2)$ (от лат. *distantio* — расстояние) $d(V_1 V_2) = \min|V_1 \dots V_2|$.

Поскольку рассматриваются конечные графы, минимум можно найти всегда. Очевидно, что $d(V_1 V_2) = d(V_2 V_1)$. Формально можно ввести расстояние $d(V' V') = 0$ между любой вершиной и ей же самой, что соответствует нулевому маршруту, у которого начало и конец в одной вершине.

В маршруте одно и то же ребро может встретиться несколько раз. Если ребро встретилось только один раз, то маршрут называется **цепью**. Например, в графе G_4 (рис. 2.1, *г*) (t, s, p) — 3-цепь. Если $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ — k-цикл, то любая циклическая перестановка, например $(x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_1)$, также будет k-циклом, поскольку сведется лишь к выбору начальной вершины. Частным случаем этого утверждения будет следующее: если k-цикл $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ является цепью, то для любой циклической подстановки $\sigma \in S_k$ последовательность $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)})$ также будет k-циклом и цепью.

В орграфе маршрут является ориентированным и называется **путем**. На путь сразу налагаются важные требования, являющиеся частью определения:

- направление каждой дуги должно совпадать с направлением пути;
- ни одно ребро пути не должно встречаться дважды.

Другими словами, **путь** — упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны. На рис. 2.3 (u, s, r, t) — 4-путь, (r, u) — 2-путь, (s, r, t, s) путем не является. Тогда **цикл** в орграфе — путь, у которого совпадают начало и конец. На рис. 2.3 (s, r, t) и (u, s, r) — 3-циклы. Для циклов орграфа также справедлива теорема о циклических подстановках.

Цепь, путь и цикл в графе называются **простыми**, если они проходят через любую из вершин не более одного раза. Неориентированный граф называется **связным**, если между любыми двумя его вершинами есть **маршрут**. Для связного графа ориентация дуг не обязательна. Так, граф G_2 (рис. 2.1, *б*) является связным, а граф G_4 (рис. 2.1, *г*) — **несвязным**. Также можно ввести понятие