2. Что называется *границами абсолютной и относительной погрешности* приближенной числовой величины? Почему вводится это понятие?

3. Какие цифры в записи приближенного числа называются *значащими, верными и верными в строгом смысле*? Приведите примеры.

4. Что называется *округлением приближенного числа*? Способы округления. Оценка погрешности при округлении.

5. Формулы *оценки погрешностей* арифметических операций *сложения и умножения*.

6. Формулы *оценки погрешностей* арифметической операции *вычитания и деления*.

Контрольное задание по предмету „Численные методы"

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

«Приближенные числа и действия над ними»

1. Определить, какое равенство точнее:

1. $\sqrt{44}=6{,}63$; $19/41=0.463$;
2. $7/15=0{,}467$; $\sqrt{30}=5{,}48$;
3. $\sqrt{10{,}5}=3{,}24$; $4/17=0{,}235$;
4. $15/7=2{,}14$; $\sqrt{10}=3{,}16$;
5. $6/7=0{,}857$; $\sqrt{4{,}8}=2{,}19$;
6. $12/11=1{,}091$; $\sqrt{6{,}8}=2{,}61$;
7. $2/21=0{,}0{,}95$; $\sqrt{22}=4{,}69$;
8. $23/15=1{,}53$; $\sqrt{9{,}8}=3{,}13$;
9. $6/11=0{,}545$; $\sqrt{83}=9{,}11$;
10. $17/19=0{,}895$; $\sqrt{52}=7{,}21$;
11. $21/29=0{,}723$; $\sqrt{44}=6{,}63$;
12. $50/19=2{,}63$; $\sqrt{27}=5{,}19$;
13. $13/17=0{,}764$; $\sqrt{31}=5{,}56$;
14. $7/22=0.318$; $\sqrt{13}=3{,}60$;
15. $17/11=1{,}545$; $\sqrt{18}=4{,}24$;
16. $5/3=1{,}667$; $\sqrt{38}=6{,}16$;
17. $49/13=3{,}77$; $\sqrt{14}=3{,}741$;
18. $3/7=1{,}857$; $\sqrt{7}=2{,}64$;
19. $19/12=1{,}58$; $\sqrt{12}=3{,}46$;
20. $51/11=4{,}64$; $\sqrt{35}=5{,}91$;
21. $18/7=2{,}57$; $\sqrt{22}=4{,}69$;
22. $19/9=2{,}11$; $\sqrt{17}=4{,}12$;
23. $16/7=2{,}28$; $\sqrt{11}=3{,}32$;
24. $20/13=1{,}54$; $\sqrt{63}=7{,}94$;
25. $12/7=1{,}71$; $\sqrt{47}=6{,}86$;
26. $6/7=0{,}857$; $\sqrt{41}=6{,}40$;
27. $23/9=2{,}56$; $\sqrt{87}=9{,}33$;
28. $27/31=0{,}872$; $\sqrt{42}=6{,}48$;
29. $7/3=2{,}33$; $\sqrt{58}=7{,}61$;
30. $14/17=0{,}823$; $\sqrt{53}=7{,}28$.

2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив только верные знаки: а) в узком смысле; б) в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.

Глава 1
ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1.1. Приближенное значение величины. Абсолютная и относительная погрешности

Решение практических задач, как правило, связано с числовыми значениями величин. Эти значения получаются либо в результате измерения, либо в результате вычислений. В большинстве случаев значения величин, которыми приходится оперировать, являются приближенными.

Пусть X — точное значение некоторой величины, а x — наилучшее из известных ее приближенных значений. В этом случае погрешность (или ошибка) приближения x определяется разностью $X-x$. Обычно знак этой ошибки не имеет решающего значения, поэтому рассматривают ее абсолютную величину:

$$e_x = |X - x|. \tag{1.1}$$

Величина e_x, называемая *абсолютной погрешностью* приближенного значения x, в большинстве случаев остается неизвестной, так как для ее вычисления нужно точное значение X. Вместе с тем, на практике обычно удается установить верхнюю границу абсолютной погрешности, т.е. такое (по возможности наименьшее) число Δx, для которого справедливо неравенство

$$\Delta x \geq |X - x|. \tag{1.2}$$

Число Δx в этом случае называется *предельной абсолютной погрешностью*, или *границей абсолютной погрешности приближения* x.

Таким образом, предельная абсолютная погрешность приближенного числа x — это всякое число Δx, не меньшее абсолютной погрешности e_x этого числа.

Пример 1.1. Возьмем число $\pi = 3{,}14159265358\ldots$. Если же вызвать π на индикатор 8-разрядного МК, получим приближение этого числа: $\pi' = 3{,}1415926$. Попытаемся выразить абсолютную погрешность значения π': $e_{\pi'} = |\pi - \pi'| = 0{,}00000005358\ldots$. Получили бесконечную дробь, не пригодную для практических расчетов. Очевидно, однако, что $e_{\pi'} < 0{,}00000006$, следовательно, число $0{,}00000006 = 0{,}6 \cdot 10^{-7}$ можно считать предельной абсолютной погрешностью приближения π', используемого МК вместо числа π: $\Delta\pi' = 0{,}6 \cdot 10^{-7}$.

Неравенство (1.2) позволяет установить приближения к точному значению X по недостатку и избытку:

$$x - \Delta x \le X \le x + \Delta x, \tag{1.3}$$

которые могут рассматриваться как одна из возможных пар значений соответственно нижней границы (НГ) и верхней границы (ВГ) приближения x:

$$НГ_x = x - \Delta x; \quad ВГ_x = x + \Delta x. \tag{1.4}$$

Во многих случаях значения границы абсолютной ошибки Δx, так же как и наилучшие значения приближения x, получаются на практике в результате измерений. Пусть, например, в результате повторных измерений одной и той же величины x получены значения: 5,2; 5,3; 5,4; 5,3. В этом случае естественно принять за наилучшее приближение измеряемой величины среднее значение $x = 5{,}3$. Очевидно также, что граничными значениями величины x в данном случае будут $НГ_x = 5{,}2$, $ВГ_x = 5{,}4$, а граница абсолютной погрешности x может быть определена как половина длины интервала, образуемого граничными значениями $НГ_x$ и $ВГ_x$, т.е. $x = \dfrac{5{,}4 - 5{,}2}{2} = 0{,}1$.

По абсолютной погрешности нельзя в полной мере судить о точности измерений или вычислений. Качество приближения характеризуется величиной *относительной погрешности*, которая определяется как отношение ошибки e_x к модулю значения X (когда оно неизвестно, то к модулю приближения x). *Предельной относительной погрешностью* (или *границей относительной погрешности*) δx приближенного числа называется отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения x:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) позволяет при необходимости выражать абсолютную погрешность через относительную:

$$\Delta x = |x| \cdot \delta x. \tag{1.6}$$

Относительную погрешность выражают обычно в процентах.

Пример 1.2. Вычислим границу относительной погрешности приближения к числу π, используемого 8-разрядным МК (см. пример 1.1).

Учитывая, что $\dfrac{0{,}6 \cdot 10^{-7}}{3{,}1415926} < 0{,}2 \cdot 10^{-7}$, можно принять $\delta\pi' = 0{,}000002\,\%$. Это чрезвычайно высокая точность, если учесть, что

… 4,8; 5; 4,9; 4,8; 5.
Основываясь на этих измерениях, установите наилучшее приближение значения периода и границы его абсолютной и относительной погрешностей.

1.2. Верные и значащие цифры. Запись приближенных значений

Цифра числа называется *верной* (в широком смысле), если ее абсолютная погрешность не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Пример 1.3. А. Пусть $a = 2{,}91385$, $\Delta a = 0{,}0097$. В числе a верны в широком смысле цифры 2, 9, 1.

Б. Возьмем в качестве приближения к числу $\pi = 3{,}141592...$ число $\pi' = 3{,}142$. Тогда $|\pi - \pi'| < 0{,}001 = \Delta\pi'$, (рис. 1.1) откуда следует, что в приближенном значении $\pi' = 3{,}142$ все цифры являются верными.

В. Вычислим на 8-разрядном МК частное точных чисел 3,2 и 2,3, получим ответ: 1,3913043. Ответ содержит ошибку, поскольку